数理解析研究所講究録
第 785 巻 1992 年 118-124

$\mathbf{R}^n$ 上の準線形楕円型偏微分方程式について

Yoshitsugu Kabeya
壁谷　喜継

Graduate School of Science and Technology, Kobe University
神戸大学　自然科学

§1. 序

この論文では，次の準線形楕円型方程式を考える：

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=q(x)|u|^{\sigma}u \quad \text{on } \mathbf{R}^n \tag{1}$$

ここで p と σ は後で述べる条件を満たす定数であり，λ は正の定数である．　我々は（１）の非自明解を，Banach 空間 $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ での汎関数

$$\Phi_\lambda(u)=\frac{1}{p}\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla u|^p+\lambda|u|^p)dx-\frac{1}{\sigma+2}\int_{\mathbf{R}^n}q(x)|u|^{\sigma+2}dx \tag{2}$$

の臨界点 (critical point) として求める．

ところで，$\Phi_\lambda(u)$ の第一項は $\lambda>0$ のとき $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ のノルムの p 乗と同等なので，$q(x)$ についての適当な条件のもと，（１）の非自明解を次の束縛条件つき最小化問題の解として求めることができる：

$$\inf_{u\in W^{1,p}(\mathbf{R}^n),\|u\|_\lambda=1}\left(-\int_{\mathbf{R}^n}q(x)|u|^{\sigma+2}dx\right)$$

ここに $\|u\|_\lambda=\left\{\int_{\mathbf{R}^n}(|\nabla u|^p+\lambda|u|^p)dx\right\}^{1/p}$ である．

$p=2$ の場合，例えば Ding and Ni [1] や Rother [4], [5] によってこのタイプの方程式が研究されているが，一般の p に対してはあまり研究されていないようである．そこで，ここでは彼らの結果を一般の p にまで拡張することを目的とする．このときポテンシャル項の $q(x)$ は球対称でなくてもよいが，特に球対称な場合を議論する．球対称でない場合は Kabeya [3] を参照されたい．

$\mathbf{R}^n$ は当然ながら非有界であり，よく知られた Palais-Smale 条件は（２）の汎関数では満たされない．しかし，$q(x)$ が球対称であることを使って，それがいくつかの条件を満たすとき，最小化列が最小値を持つことを示すことが出来る．このとき，$q(x)$ が遠方である速さで増大しても構わないことに注意する．

最後にいくつかの記号を導入する．関数空間 $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$ を $W^{1,p}$ で，$L^t(\mathbf{R}^n)$ を L^t で表す．また，関数 f に対して，その正の部分，負の部分をそれぞれ $f_+=\max(f,0)$，

$f_- = \max(-f,0)$ で表す．臨界 Sobolev 指数を p^*で表す．つまり $p^* = np/(n-p)$ であり，これは $W^{1,p}$を L^αに埋め込んだときの臨界指数である．$W^{1,p}$ノルムを

$$\|u\|_\lambda = \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} (|\nabla u|^p + \lambda |u|^p) dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

で定める．なお $\lambda > 0$ なら，これは通常の $W^{1,p}$ノルムと一致する．コンパクトな台をもつ球対称で滑らかな関数の空間を

$$C_{0,r}^\infty = \{u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) \mid u \text{ は球対称 }\}$$

で表し，$W_r^{1,p}$で，$C_{0,r}^\infty$の $W^{1,p}$ノルムによる完備化を表す．中心 x_0，半径ρの球を $B_\rho(x_0)$ で表す．$\mathbf{R}^n$の単位球 $B_1(0)$ の表面積をω_nで表す．

§2. 球対称解の存在

この節では，ポテンシャル $q(x)$ が $r = |x|$ のみに依存する関数と仮定する．また，いろいろな定数を同じ文字 Cで表す．

まず，次の補題を証明する．これにより，$q(x)$ は遠方である程度増大してもよいことが分かる．

補題 1 (the radial lemma)．
$u \in W_r^{1,p}$と $1 < p < n$ に対して $x \neq 0$ のとき

$$|u(x)|^p \leq C|x|^{p-n}\|u\|_\lambda^p$$

が成立する．

注意．
$p = 2$ のときの証明は Struwe [6] に出ている (p139)．

証明．
$W_r^{1,p}$の定義から $u \in C_{0,r}^\infty$ に対して証明すればよい．このような u に対しては，

$$|u(x)|^p = -\int_{|x|}^\infty \frac{d}{dr}\{|u(r)|^p\} dr$$

が成立する．この右辺は

$$\left|\int_{|x|}^\infty \frac{d}{dr}\{|u(r)|^p\} dr\right| \leq p\int_{|x|}^\infty |u(r)|^{p-1}\left|\frac{d}{dr}u(r)\right| dr$$

と評価される．つぎに，この不等式の右辺の被積分関数を

$$|u(r)|^{p-1}\left|\frac{d}{dr}u(r)\right| = r^{-(n-1)(n+1-p)/n}\left\{|u(r)|r^{(n-1)/p^*}\right\}^{p-1}\left|\frac{d}{dr}u(r)\right|r^{(n-1)/p}$$

のように変形する．ここで，rの指数は0に等しいことに注意する．実際，

$$\begin{aligned}
&-\frac{(n-1)(n+1-p)}{n}+\frac{(n-p)(n-1)(p-1)}{pn}+\frac{(n-1)}{p}\\
=&\frac{n-1}{pn}\{-p(n+1-p)+(n-p)(p-1)\}+\frac{n(n-1)}{pn}\\
=&\frac{-n(n-1)+n(n-1)}{pn}\\
=&0
\end{aligned}$$

となるからである．さらに，Hölder の不等式を使って上の不等式を上から評価する．まずは，実際に Hölder の不等式が使えることを示す．そこで $\alpha=n/(p-1)$, $\beta=p^*/(p-1)$, $\gamma=p$ とおき，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=&\frac{p-1}{n}+\frac{(n-p)(p-1)}{pn}+\frac{1}{p}\\
=&\frac{p(p-1)+(n-p)(p-1)+n}{pn}\\
=&1
\end{aligned}$$

が成立することを押さえると，分解した被積分関数の各部分をそれぞれ$\alpha=n/(p-1)$, $\beta=p^*/(p-1)$, $\gamma=p$ 乗することができ，確かに適用できる．

すると

$$\begin{aligned}
&|\int_{|x|}^{\infty}\frac{d}{dx}\{|u(r)|^p\}dr|\leq p\int_{|x|}^{\infty}|u(r)|^{p-1}|\frac{d}{dr}u(r)|dr\\
\leq& p\Big(\int_{|x|}^{\infty}r^{-(n-1)(n+1-p)/(p-1)}dr\Big)^{(p-1)/n}\\
&\times\Big(\int_{|x|}^{\infty}|u(r)|^{pn/(n-p)}r^{n-1}dr\Big)^{(n-p)(p-1)/pn}\Big(\int_{|x|}^{\infty}|\frac{d}{dr}u(r)|^p r^{n-1}dr\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

が成立して，

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|}^{\infty}r^{-(n-1)(n+1-p)/(p-1)}dr\\
&=\Big\{1-\frac{(n-1)(n+1-p)}{p-1}\Big\}^{-1}\Big[r^{1-(n-1)(n+1-p)/(p-1)}\Big]_{|x|}^{\infty}\\
&=\frac{p-1}{n(n-p)}|x|^{-n(n-p)/(p-1)}
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p&\leq p\{\frac{p-1}{n(n-p)}\}^{(p-1)/n}\omega_n^{-(n-p)(p-1)/pn}\omega_n^{-1/p}|x|^{p-n}\|u\|_{L^{p^*}}^{p-1}\|\nabla u\|_{L^p}\\
&\leq p\{\frac{p-1}{n(n-p)}\}^{(p-1)/n}\omega_n^{-(n-p)(p-1)/pn}\omega_n^{-1/p}|x|^{p-n}\Big(\|u\|_{L^{p^*}}+\|\nabla u\|_{L^p}\Big)^p\\
&\leq C|x|^{p-n}\|\nabla u\|_{L^p}^p \quad (\text{Sobolevの埋め込み定理より})\\
&\leq C|x|^{p-n}\|u\|_{\lambda}^p
\end{aligned}$$

を得る．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

この補題を使って，次の定理が証明できる．

定理 2．

$1 < p < n$，かつ $p^* - 2 < \sigma$とする．$q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は可測な球対称関数であり次の仮定を満たすとする：

(A 1)
$$q = q_+ - q_-,\ q_- \in L^1_{loc},$$

(A 2)
$$0 \le q_+(|x|) \le f(|x|)|x|^{k(\sigma)}.$$

ここに $f \in L^\infty$であり，$k(\sigma) = \frac{n-p}{p}\{(\sigma+2) - p^*\} - \delta$, δは正の定数である．さらに

(A 3)
$$0 \le f(|x|) \le C|x|^{2\delta} \text{ on } B_\eta(0)\ .$$

ここで $\eta > 0$ は小さな正の定数である．

(A 4)
$$\int_{\mathbf{R}^n} q|u_0|^{\sigma+2}dx > 0 \text{ なる } u_0 \in W_r^{1,p} \text{が存在する．}$$

このときすべての $\lambda > 0$ に対して，(1) の非自明弱解 u が $W_r^{1,p}$で存在する．

注意．

仮定 (A 3) におけるδは任意の正の数でよい．しかし，(A 3) の仮定に応じて，$f(|x|)$ は仮定 (A 3) のように原点の近傍でふるまわないといけない．また，σについての仮定は$p-2<\sigma$でよい．$p-2<\sigma<p^*$のときは，$q(x)$ が原点で零にならなくてもよい（ Kabeya [3] ）．しかし，ここではそのことについては触れないことにする．

証明．

まず，いくつかの記号を導入する：

$$D_r = \{u \in W_r^{1,p} \mid \int_{\mathbf{R}^n} q_-|u|^{\sigma+2}dx < \infty,\ \|u\|_\lambda = 1\ \},$$
$$I(u) = -\int_{\mathbf{R}^n} q(x)|u|^{\sigma+2}dx\ ,$$
$$I_0 = \inf_{u \in D_r} I(u)\ .$$

すると補題 1 から，$u \in W_r^{1,p}$に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} q_+|u|^{\sigma+2}dx =& \omega_n \int_0^\infty q_+|u|^{\sigma+2}r^{n-1}dr \\ \le& C\omega_n\Big(\int_0^\eta q_+\|u\|_\lambda^{\sigma+2}r^{(p-n)(\sigma+2)/p+n-1}dr \\ &+ \int_\eta^\infty q_+\|u\|_\lambda^{\sigma+2}r^{(p-n)(\sigma+2)/p+n-1}dr\Big)\end{aligned}$$

がわかる．仮定 (A 2) と (A 3) から

$$\int_{\mathbf{R}^n} q_+|u|^{\sigma+2}dx \le C\omega_n\Big\{\int_0^\eta r^\mu dr + \int_\eta^\infty r^\nu dr\Big\}$$

を得る．ここに

$$\begin{aligned}\mu =&2\delta + \frac{n-p}{p}\{(\sigma+2) - \frac{np}{n-p}\} - \delta - \frac{n-p}{p}(\sigma+2) + n - 1,\\ \nu =&\frac{n-p}{p}\{(\sigma+2) - \frac{np}{n-p}\} - \delta - \frac{n-p}{p}(\sigma+2) + n - 1\end{aligned}$$

である．これらを計算すると $\mu = \delta - 1$, $\nu = -\delta - 1$ であることがわかる．すると結局,

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} q_+|u|^{\sigma+2}dx \le&C\omega_n\Big\{\big[\frac{1}{\delta}r^\delta\big]_0^\eta + \|f\|_{L^\infty}\big[-\frac{1}{\delta}r^{-\delta}\big]_\eta^\infty\Big\}\\ =&C\omega_n\frac{1}{\delta}\Big\{\eta^\delta + \|f\|_{L^\infty}\eta^{-\delta}\Big\}\end{aligned}$$

という不等式を得，右辺は $u \in D_r$ に依存しないことがわかる．次に $\{u_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ を I_0 に対する D_r での最小化列とする．仮定 (A 4) と上の不等式 (3) により

$$-\infty < I_0 \le I(u_0) < 0$$

がわかる．

そこで，はじめから $I(u_j) < 0$ と仮定してよい．

$$\int_{\mathbf{R}^n} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx \le C$$

と

$$I_0 \le -\int_{\mathbf{R}^n} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx + \int_{\mathbf{R}^n} q_-|u_j|^{\sigma+2}dx < 0$$

から

$$\int_{\mathbf{R}^n} q_-|u_j|^{\sigma+2}dx \le C$$

がわかる．$\|u_j\|_\lambda = 1$ であるから,

$$u_j \rightharpoonup v \text{ weakly in } W^{1,p}, \quad \text{かつ} \quad u_j \to v \quad \text{a.e. in } \mathbf{R}^n$$

と仮定してよい．すると

$$\|v\|_\lambda \le \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|_\lambda \le 1$$

と

$$\int_{\mathbf{R}^n} q_-|v|^{\sigma+2}dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} q_-|u_j|^{\sigma+2}dx \leq C$$

を得る．

$\|u_j\|_\lambda = 1$ と不等式 (3) から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して正の数 R_ε と r_ε があって，

$$\int_{|x|\geq R_\varepsilon} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx \leq \varepsilon, \quad \int_{|x|\leq r_\varepsilon} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx \leq \varepsilon$$

がすべての $j \in \mathbf{N}$ に対して成立する．

$T_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \mid r_\varepsilon \leq |x| \leq R_\varepsilon\}$ とおき，Lebesgue の有界収束定理により (Lemma 1 と (A 2) より可積分な優関数がとれる： $q_+|u|^{\sigma+2}$ についての評価を見よ.)，

$$\int_{T_\varepsilon} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx \longrightarrow \int_{T_\varepsilon} q_+|v|^{\sigma+2}dx \quad \text{as } j \to \infty$$

を得る．

$$I(v) \leq \int_{\mathbf{R}^n} q_-|v|^{\sigma+2}dx - \int_{T_\varepsilon} q_+|v|^{\sigma+2}dx,$$

だから，上の評価を使って

$$\begin{aligned}
I(v) &= -\int_{\mathbf{R}^n} (q_+ - q_-)|v|^{\sigma+2}dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} q_-|v|^{\sigma+2}dx - \int_{\mathbf{R}^n} q_+|v|^{\sigma+2}dx \\
&\leq \int_{\mathbf{R}^n} q_-|v|^{\sigma+2}dx - \int_{T_\varepsilon} q_+|v|^{\sigma+2}dx \\
&\leq \liminf_{j\to\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^n} q_-|u_j|^{\sigma+2}dx - \int_{T_\varepsilon} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx\right) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^n} q_-|u_j|^{\sigma+2}dx - \int_{\mathbf{R}^n} q_+|u_j|^{\sigma+2}dx + 2\varepsilon\right) \\
&= I_0 + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

を得，

$$I(v) \leq \liminf_{j\to\infty}(I(u_j) + 2\varepsilon) = I_0 + 2\varepsilon$$

となる．これより $I(v) \leq I_0$ がわかる．最後に $v \in D_\tau$ を示す．$\alpha = \|v\|_\lambda$ とおけば，$\alpha \in (0, 1]$ かつ $\frac{1}{\alpha}v \in D_\tau$ がわかる． すると

$$I_0 \leq I(\frac{1}{\alpha}v) = \alpha^{-(\sigma+2)}I(v) \leq \alpha^{-(\sigma+2)}I_0 < 0$$

となり，$I_0<0$ に注意すれば $\alpha=1$ を得る．よって $v\in D_r$ かつ $I(v)=I_0$がわかる．$|q||v|^{\sigma+1}$ は

$$\begin{aligned}\int_B |q||v|^{\sigma+1}dx &= \int_B |q|^{1/(\sigma+2)}|q|^{(\sigma+1)/(\sigma+2)}|v|^{\sigma+1}dx\\ &\leq\Big(\int_B |q|dx\Big)^{1/(\sigma+2)}\cdot\Big(\int_B |q||v|^{\sigma+2}\Big)^{(\sigma+1)/(\sigma+2)} < +\infty\end{aligned}$$

が Hölder の不等式により任意の有界領域 $B\subset \mathbf{R}^n$について成立するから，局所可積分である． そこで $v\in D_r$での Gateaux 微分を考えると

$$\int_{\mathbf{R}^n}\Big\{|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi+\lambda|u|^{p-2}u\varphi\Big\}dx=|I_0|^{-1}\int_{\mathbf{R}^n} q|u|^{\sigma}u\varphi dx$$

が任意の $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して成立することがわかる．

このとき，$u=|I_0|^{-1/(\sigma-p+2)}v$が (1) の非自明弱解であることがわかる．

（証明終）

正則性については，DiBenedetto [1]，Uhlenbeck [7] が参考になるであろう．

References

[1] DiBenedetto, E., $C^{1,\alpha}$ local reguralty of weak solutions of degenerate elliptic equations, Nonlinear Analysis 7(1983), 827–850.

[2] Ding W.-Y.and Ni W.-M., On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation, Arch. Rational. Mech. Anal. 91(1986), 283–308.

[3] Kabeya, Y., Existence theorems for quasilinear elliptic problems on $\mathbf{R}^n$, *to appear in Funkcial. Ekvac.*.

[4] Rother, W., Existence theorems for a nonlinear elliptic eigenvalue problem on $\mathbf{R}^n$, Nonlinear Analysis 15(1990), 381–386.

[5] Rother, W., Some existence results for the equations $\Delta U+K(x)U^p=0$, Commun.in P.D.E. 15(1990), 1461–1473.

[6] Struwe, M., *Variational methods*, Springer-Verlag (1990).

[7] Uhlenbeck, K., Regularity for a class of non-linear elliptic systems, Acta Math. 138(1977), 219–240.